УДК 624.04
https://doi.org/10.23947/2949-1835-2022-1-3-43-52

Научная статья

О влиянии выбора основной системы метода сил на точность расчетов при решении плоской задачи теории упругости в напряжениях

Г. Т. Гагалаян ✉, **А. С. Фоминых**

Донской государственный технический университет, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
✉ ggagalayan@mail.ru

Аннотация

Введение. Известно, что решение задачи теории упругости возможно в перемещениях, напряжениях, а также смешанным методом. Наиболее распространен метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений, однако он имеет свои недостатки. Целью настоящей статьи является изучение особенностей численного решения плоской задачи теории упругости в напряжениях с использованием метода конечных разностей (МКР) для возможности его использования в качестве альтернативы МКЭ. Рассматриваются варианты выбора основной системы метода сил для получения граничных условий при расчете прямоугольной балки-стенки методом сеток и их влияние на конечный результат при вычислении напряжений.

Материалы и методы. Расчет прямоугольной балки-стенки реализован в программе *Balka-Stenka*, разработанной в ДГТУ. Выполняется сравнение решения на основе метода конечных разностей с решением методом конечных элементов в форме метода перемещений в программном комплексе «ЛИРА-САПР». Точность расчетов определяется путем выполнения статических проверок равновесия отсеченной части конструкции. Для рассматриваемой конструкции проанализированы пять вариантов выбора основной системы метода сил (ОСМС).

Результаты исследования. Впервые установлено, что, в отличие от расчета стержневых систем, выбор ОСМС несущественно влияет на окончательные величины напряжений при решении плоской задачи теории упругости.

Обсуждение и заключение. Сравнение результатов расчета при помощи метода конечных элементов в форме метода перемещений и метода конечных разностей показало некоторые преимущества последнего. Метод конечных разностей может выступить альтернативой методу конечных элементов в форме метода перемещений для решения плоской задачи теории упругости при условии автоматизации процесса построения эпюр внутренних усилий в контуре балки-стенки.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод конечных разностей, плоская задача теории упругости, балка-стенка, плоское напряженное состояние, рамная аналогия.

Для цитирования. Гагалаян, Г. Т. О влиянии выбора основной системы метода сил на точность расчетов при решении плоской задачи теории упругости в напряжениях / Г. Т. Гагалаян, А. С. Фоминых // Современные тенденции в строительстве, градостроительстве и планировке территорий. — 2022. — Т. 1, № 3. — С. 43–52. https://doi.org/10.23947/2949-1835-2022-1-3-43-52

Original article

About Influence of Choosing the Force Method Principal System on the Accuracy of Calculations in Solving a Stress-Based Plane Elasticity Problem

Gurgen T. Gagalayan ✉, **Anna S. Fominykh**

Don State Technical University, Gagarin sq., 1, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ ggagalayan@mail.ru

Abstract

Introduction. It is known that the solution of a problem in elasticity theory is possible based on displacements, stresses, as well as mixed method. The most common is the displacement-based finite element method (FEM), however, it has its imperfections. The aim of this article is to study the features of numerical solution of a stress-based plane elasticity problem using the finite difference method (FDM) as a possible alternative to the FEM. The options for choosing the force method principal system are considered aiming to obtain the boundary conditions in calculating a rectangular beam-wall by the grid method along with the influence thereof on the final result during stresses calculation.

Materials and methods. The calculation of a rectangular beam-wall is made in Balka-Stenka software developed in DSTU. Comparison between a solution made by the finite difference method and a solution made by the displacement-based finite element method is made in the LIRA-SAPR software. The accuracy of calculations is determined by performing the static balance tests of the cut-off part of a structure. For the structure under consideration, the choice of five options of the force method principal system (FMPS) is analysed.

Results. For the first time the conclusion was made that in contrast to the calculation of bar systems, the choice of FMPS does not significantly affect the final stress values in solving a plane elasticity problem.

Discussion and conclusion. The comparison of calculation results made by the displacement-based finite element method and by the finite difference method showed some advantages of the latter. The finite difference method can act as an alternative to the displacement-based finite element method in solving a plane elasticity problem on condition of automation of the process of building the internal forces epures in a wall beam-wall contour.

Keywords: finite element method, finite difference method, plane stress problem, beam-wall, plane stress state, frame analogy.

For citation. G. T. Gagalayan, A. S. Fominykh. About Influence of Choosing the Force Method Principal System on the Accuracy of Calculations in Solving a Stress-Based Plane Elasticity Problem. Modern Trends in Construction, Urban and Territorial Planning, 2022, vol. 1, no. 3, pp. 43–52. https://doi.org/10.23947/2949-1835-2022-1-3-43-52

Введение. В качестве основного метода расчета строительных конструкций в настоящее время выступает метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений [1–4].

Недостатками МКЭ в форме метода перемещений являются [5–7]:

1. Пониженная, по сравнению с перемещениями, точность вычисления усилий (напряжений).
2. Сложность учета разрывов значений усилий (напряжений) на межэлементных границах.
3. Неиспользование граничных условий, выраженных в усилиях (напряжениях).
4. «Запирание» при расчете с учетом элементов, обладающих большой сдвиговой жесткостью, когда энергия деформации от сдвига значительно превышает энергию деформации от изгиба.
5. Содержащиеся в кинематических граничных условиях смещения конечного элемента, как жесткого целого, не связанные с работой внутренних сил. Они приводят к ухудшению обусловленности матрицы жесткости

всей конструкции при сгущении конечно-элементной сетки, когда необходимо повысить точность решения в опасных зонах или при итерационном решении нелинейных задач.

6. Сложности при включении в конструкцию недеформируемых элементов и при расчетах геометрически изменяемых систем в виде кинематической цепи.

Альтернативой МКЭ при решении плоской задачи теории упругости (ТУ) выступает метод конечных разностей. При этом в качестве искомой функции выступает функция напряжений.

Классическим объектом, для которого имеет место плоская задача ТУ, является балка-стенка — тонкая пластина, подверженная действию нагрузок, приложенных в ее срединной плоскости.

В качестве граничных условий при расчете балки-стенки выступает рамная аналогия. Если рассмотреть контур балки-стенки как раму, то функция напряжений на контуре будет равна изгибающему моменту, а ее производная по нормали – продольной силе:

$$\varphi = M;$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = N. \quad (1)$$

Замкнутый контур балки-стенки при рассмотрении его как рамы является трижды статически неопределимым, однако эпюры M и N можно строить в основной системе метода сил (ОСМС). При этом в зависимости от выбора ОСМС эпюры будут различными, а значит и будет отличаться функция напряжений φ. Однако окончательные значения напряжений должны быть одинаковы, поскольку все функции напряжений, получаемые на основе различных ОСМС, отличаются на линейную функцию $Ax + By + C$. Известно, что для стержневых систем при решении методом сил точность результатов зависит от выбора ОСМС [8–9].

Целью настоящей работы выступает исследование влияния выбора ОСМС на точность определения напряжений в балке-стенке. В рамках поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Расчет балки-стенки методом конечных разностей при различных вариантах выбора ОСМС.

2. Расчет той же конструкции при помощи метода конечных элементов в форме метода перемещений.

3. Сопоставление результатов расчета при помощи МКР в различных ОСМС, а также МКР и МКЭ.

Материалы и методы. Задача определения напряжений деформированного состояния балки-стенки сводится к однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка в частных производных [10–11]:

$$\nabla^4 \varphi = 0, \quad (2)$$

где φ — функция напряжений (функция Эри);

$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}$ – двойной оператор Лапласа.

Разностная аппроксимация уравнения (2) имеет вид:

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_k - 4(1+\alpha)(\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \alpha\varphi_d) +$$
$$+2\alpha(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + \varphi_i + \alpha^2\varphi_l + \varphi_m + \alpha^2\varphi_n = 0, \quad (3)$$

где $\alpha = \Delta z^2/\Delta x^2$.

Разностная схема (3) имеет второй порядок точности.

Схема узлов к формуле (3) показана на рис. 1.

Уравнение (3) составляется для всех внутренних узлов сетки. При составлении уравнений для смежных к контуру узлов возникает необходимость определения функции напряжений в «законтурных» точках. Для этого используется второе условие в (1).

Нормальные и касательные напряжения при отсутствии объемных сил вычисляются по формулам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}. \quad (4)$$

Или в форме метода конечных разностей:

$$\sigma_{z,k} = \frac{\varphi_b - 2\varphi_k + \varphi_d}{\Delta x^2};$$
$$\sigma_{x,k} = \frac{\varphi_a - 2\varphi_k + \varphi_c}{\Delta z^2}; \quad (5)$$
$$\tau_{xz,k} = \frac{(\varphi_g + \varphi_e) - (\varphi_f + \varphi_h)}{4\Delta x \Delta z}.$$

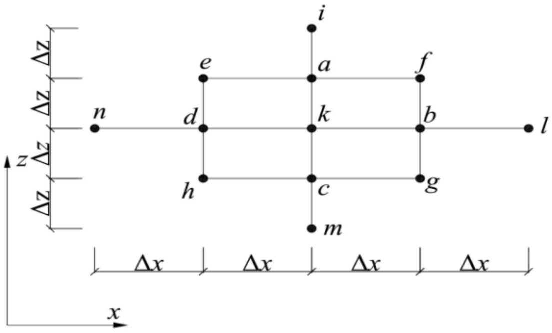


Рис. 1. Схема узлов для составления уравнений МКР (рисунок авторов)

В данной работе рассматривается прямоугольная балка-стенка (тонкая пластина) из изотропного материала, соответствующего закону Гука, загруженная нормальной к контуру поверхностной нагрузкой. При этом сосредоточенная сила F рассматривается как предельный случай равномерно распределенной нагрузки на малом участке балки-стенки. Толщина балки-стенки принимается равной единице.

Требуется определить напряженное состояние пластины. Расчетная схема приведена на рис. 2. Расчет выполняется при a = 9,9 м; b = 13,5 м; q= 30 $\frac{\text{кН}}{\text{м}}$; P= 130 кН; Δx = 1,1 м; Δz = 0,9 м. Конструкция разбивается на 9 интервалов по горизонтали и 15 — по вертикали.

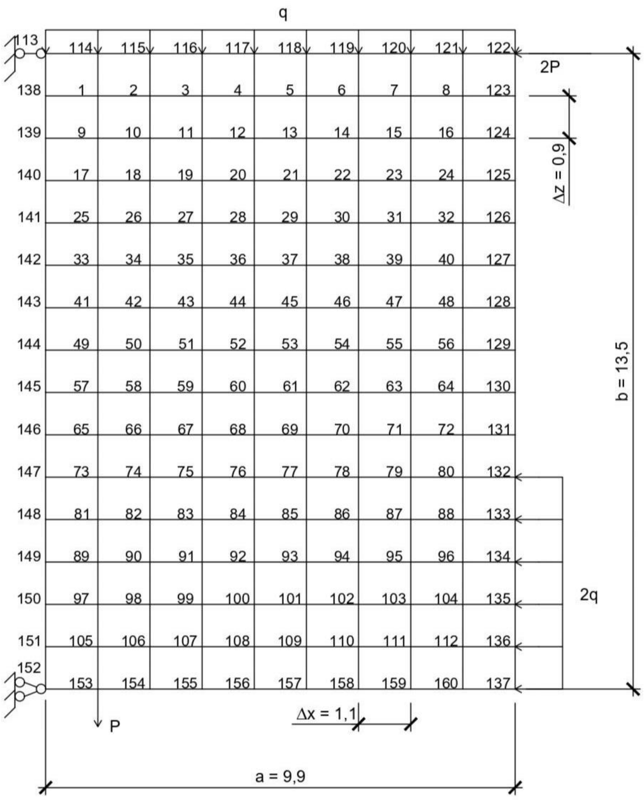


Рис. 2. Исходная схема (рисунок авторов)

В качестве ОСМС рассматриваются варианты, представленные на рис. 3. Опоры в узлах 113 и 152 в ОСМС остаются нетронутыми, в вариантах (а) и (в) врезается три промежуточных шарнира в угловых точках, а в остальных вариантах делается разрез на одной из сторон.

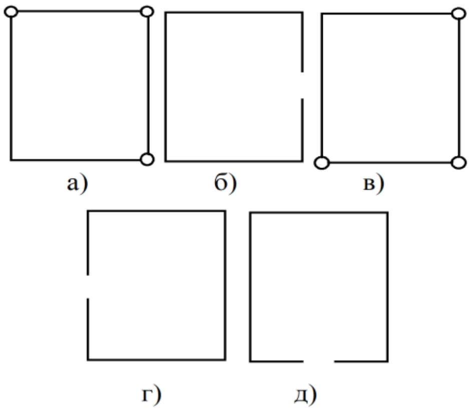


Рис. 3. Варианты ОСМС (рисунок авторов)

Расчет реализован в программе Balka-Stenka, разработанной на кафедре «Сопротивление материалов» Донского государственного технического университета. Общее количество уравнений и неизвестных для рассматриваемой схемы — 112.

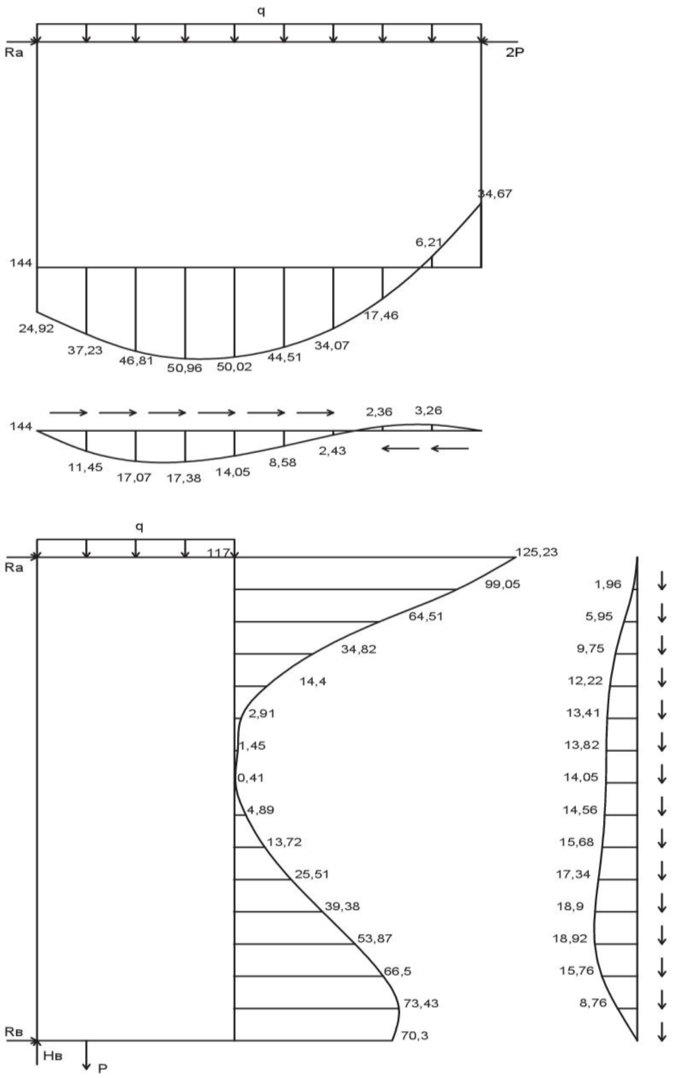


Рис. 4. Статическая проверка (рисунок авторов)

После определения напряжений выполняются две статические проверки равновесия отсеченной части. На рис. 4 показано равновесие верхней и правой отсеченной части при расчете на основе ОСМС варианта (а).

Также выполняется расчет при помощи МКЭ в форме метода перемещений в программном комплексе «ЛИРА-САПР» при том же количестве узлов сетки. При расчете в ПК «ЛИРА» используются плоские прямоугольные конечные элементы балки-стенки (КЭ 21) с двумя степенями свободы в узле (линейные перемещения u и w вдоль осей x и z).

Результаты исследования. В таблицах 1–2 представлены полученные в результате расчета методом конечных разностей с использованием различных ОСМС значения напряжений по линиям 144–129 (горизонтальное сечение) и 117 – 156 (вертикальное сечение). Также в указанных таблицах приведены результаты на основе МКЭ.

Таблица 1

Значения напряжений σ_z и τ_{xz} по линии 144–129

Вариант	Номер узла	144	49	50	51	52
а	σ_z	-24,924	-37,231	-46,807	-50,975	-50,023
	τ_{xz}	0	-11,445	-17,068	-17,384	-14,047
б	σ_z	-24,946	-37,251	-46,818	-50,977	-50,019
	τ_{xz}	0	-11,451	-17,076	-17,393	-14,054
в	σ_z	-24,948	-37,251	-46,817	-50,977	-50,019
	τ_{xz}	0	-11,451	-17,077	-17,393	-14,054
г	σ_z	-25,17	-37,324	-46,783	-50,883	-49,918
	τ_{xz}	0	-11,501	-17,133	-17,424	-14,05
д	σ_z	-25,051	-37,284	-46,793	-50,931	-49,977
	τ_{xz}	0	-11,487	-17,104	-17,399	-14,043
ЛИРА-САПР	σ_z	-30,7	-36,1	-45,4	-50,5	-50,2
	τ_{xz}	-6,33	-10,8	-17,1	-17,9	-14,4
Вариант	Номер узла	53	54	55	56	129
а	σ_z	-44,513	-34,072	-17,462	6,209	34,671
	τ_{xz}	-8,575	-2,431	2,363	3,261	0
б	σ_z	-44,506	-34,064	-17,453	6,219	34,685
	τ_{xz}	-8,58	-2,435	2,361	3,26	0
в	σ_z	-44,506	-34,064	-17,453	6,219	34,685
	τ_{xz}	-8,58	-2,435	2,361	3,26	0
г	σ_z	-44,433	-34,034	-17,471	6,152	34,559
	τ_{xz}	-8,549	-2,392	2,402	3,287	0
д	σ_z	-44,48	-34,056	-17,463	6,191	34,638
	τ_{xz}	-8,561	-2,414	2,379	3,271	0
ЛИРА-САПР	σ_z	-44,4	-32,9	-15	8,83	22
	τ_{xz}	-8,33	-1,81	2,49	2,62	1,54

Таблица 2

Значения напряжений σ_x и τ_{xz} по линии 117–156

Вариант	Номер узла	117	4	12	20
а	σ_x	-125,231	-99,051	-64,507	-34,823
	τ_{xz}	0	-1,958	-5,954	-9,754
б	σ_x	-125,212	-99,038	-64,499	-34,821
	τ_{xz}	0	-1,964	-5,962	-9,763
в	σ_x	-125,213	-99,038	-64,499	-34,821
	τ_{xz}	0	-1,963	-5,962	-9,763
г	σ_x	-125,251	-99,067	-64,526	-34,849
	τ_{xz}	0	-1,965	-5,965	-9,766
д	σ_x	-125,225	-99,049	-64,51	-34,834
	τ_{xz}	0	-1,964	-5,963	-9,764
ЛИРА-САПР	σ_x	-114	-99,8	-88,3	-37,3
	τ_{xz}	-0,582	-1,86	-5,22	-9,33
Вариант	Номер узла	28	36	44	52
а	σ_x	-14,398	-2,907	1,454	0,406
	τ_{xz}	-12,224	-13,406	-13,821	-14,047
б	σ_x	-14,398	-2,911	1,448	0,397
	τ_{xz}	-12,233	-13,414	-13,829	-14,054
в	σ_x	-14,398	-2,911	1,448	0,397
	τ_{xz}	-12,232	-13,414	-13,829	-14,054
г	σ_x	-14,429	-2,942	1,422	0,386
	τ_{xz}	-12,235	-13,415	-13,827	-14,05
д	σ_x	-14,414	-2,929	1,429	0,383
	τ_{xz}	-12,233	-13,413	-13,824	-14,043
ЛИРА-САПР	σ_x	-14,6	-1,88	1,76	0,61
	τ_{xz}	-12,6	-13,9	-14,3	-14,4
Вариант	Номер узла	60	68	76	84
а	σ_x	-4,885	-13,717	-25,506	-39,38
	τ_{xz}	-14,564	-15,675	-17,342	-18,897
б	σ_x	-4,897	-13,732	-25,523	-39,396
	τ_{xz}	-14,57	-15,679	-17,342	-18,89
в	σ_x	-4,897	-13,732	-25,523	-39,396
	τ_{xz}	-14,57	-15,679	-17,342	-18,89
г	σ_x	-4,877	-13,667	-25,408	-39,247
	τ_{xz}	-14,568	-15,688	-17,379	-18,962
д	σ_x	-4,898	-13,706	-25,455	-39,283
	τ_{xz}	-14,551	-15,653	-17,318	-18,892
ЛИРА-САПР	σ_x	-4,14	-13,4	-25,8	-40,6
	τ_{xz}	-15	-16,4	-18,5	-20
Вариант	Номер узла	92	100	108	156
а	σ_x	-53,872	-66,502	-73,431	-70,302
	τ_{xz}	-18,924	-15,761	-8,761	0
б	σ_x	-53,881	-66,496	-73,404	-70,264
	τ_{xz}	-18,91	-15,741	-8,744	0
в	σ_x	-53,881	-66,496	-73,404	-70,264
	τ_{xz}	-18,91	-15,741	-8,744	0
г	σ_x	-53,735	-66,382	-73,386	-71,111
	τ_{xz}	-18,983	-15,723	-8,633	0
д	σ_x	-53,759	-66,469	-73,571	-70,422
	τ_{xz}	-18,968	-15,842	-8,732	0
ЛИРА-САПР	σ_x	-55,4	-86,9	-71,8	-72,2
	τ_{xz}	-18,8	-14,1	-7,1	-3,15

В таблицах 3–4 представлены полученные погрешности статических проверок равновесия левой и верхней отсеченной части при различных вариантах ОСМС, а также при расчете с помощью МКЭ в программном комплексе «ЛИРА-САПР».

Таблица 3

Погрешности статической проверки равновесия левой отсеченной части

Погрешность	ΣX	ΣZ	ΣM
а)	0,313 %	0,478 %	0,0805 %
б)	0,001 %	0,476 %	0,133 %
в)	0,001 %	0,476 %	0,133 %
г)	0,0036 %	0,461 %	0,0827 %
д)	0,00103 %	0,465 %	0,16 %
ЛИРА-САПР	0,0405 %	0,611 %	0,522 %

Таблица 4

Погрешности статической проверки равновесия верхней отсеченной части

Погрешность	ΣX	ΣZ	ΣM
а)	0,979 %	0,0017 %	0,454 %
б)	0,99 %	0,73 %	0,464 %
в)	0,99 %	0,73 %	0,464 %
г)	1,007 %	0,0056 %	0,453 %
д)	0,988 %	0,0017 %	0,462 %
ЛИРА-САПР	0,942 %	0,0069 %	0,542 %

Из таблиц 1–2 видно, что напряжения при расчете методом конечных разностей при выборе основной системы метода сил по схемам «а–д» отличаются незначительно. Среднее расхождение результатов, полученных при помощи МКР, с решением на основе метода конечных элементов составляет 13,9 % по напряжениям σ_x, 7,2 % по напряжениям σ_z и 7,7 % по напряжениям τ_{xz} (без учета крайних узлов). Следует также обратить внимание на то, что в лежащих на контуре балки-стенки узлах 144, 129, 117, 156 при расчете методом конечных элементов касательные напряжения τ_{xz} оказываются отличными от нуля, что противоречит условиям на поверхности:

$$X_\nu = \sigma_x \cdot l + \tau_{xz} \cdot n,$$
$$Z_\nu = \tau_{zx} \cdot l + \sigma_z \cdot n, \quad (6)$$

где X_ν и Z_ν составляющие поверхностной нагрузки по осям x и z; l = cos(x,ν); n = cos(z,ν) – направляющие косинусы нормали к поверхности балки-стенки ν.

Невыполнение условий на поверхности по касательным напряжениям при расчете в ПК «ЛИРА» можно объяснить тем, что напряжения в данном программном комплексе вычисляются только в центрах конечных элементов, и выведенные значения для узлов 144, 129, 117, 156 на самом деле соответствуют точкам, смещенным на $\Delta x/2$ или $\Delta z/2$.

В то же время эта особенность никак не отразилась на погрешностях статических проверок, они сопоставимы с результатами, полученными при помощи метода конечных разностей региона [9].

Обсуждения и заключения. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Выбор основной системы метода сил практически не влияет на результат по напряжениям.

2. Точность решения при помощи метода конечных элементов сопоставима с точностью метода конечных разностей, но при решении методом конечных элементов при одинаковой густоте сетки число неизвестных в узле в 2 раза больше (перемещения u и w).

3. Недостатком МКЭ по сравнению с МКР является невозможность точного определения напряжений непосредственно на поверхности конструкции.

4. МКР может служить альтернативой МКЭ в форме метода перемещений при решении плоской задачи теории упругости в случае автоматизации процесса построения эпюр изгибающего момента и продольной силы в контуре балки-стенки, как в раме.

Библиографический список

1. Фокин, В. Г. Метод конечных элементов в механике деформируемого твёрдого тела / В. Г. Фокин. — Самара: Самарский гос. технический ун-т, 2010. — С. 22. URL: http://meh.samgtu.ru/sites/meh.samgtu.ru/files/fokin.pdf

2. Язьев, Б. М. Расчёт трёхслойной пластинки методом конечных элементов с учётом ползучести среднего слоя / Б. М. Язьев и др. // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. — 2014. — Т. 33, №. 2. — С. 47–55.

3. Chepurnenko, A. Finite element modeling of the creep of shells of revolution under axisymmetric loading / A. Chepurnenko, N. Neumerzhitskaya, M. Turko // Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport. — Springer, Cham, 2017. — P. 808–817. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-70987-1_86.

4. Chepurnenko, A. Calculation of a three-layer plate by the finite element method taking into account the creep of the filler / A. Chepurnenko, A. Savchenko, S. Yazyeva // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2017. — Vol. 129. — P. 05008. DOI: https://doi.org/10.1051/matecconf/201712905008.

5. Игнатьев, А. В. Развитие метода конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики / А. В. Игнатьев // Дисс. д-ра техн.технических техн. 543 наук: 05.23.17. — Волгоград, 2019. — С. 294. — URL: https://www.vstu.ru/upload/iblock/65a/65a405ea74517bf03e889045eda7ad00.pdf.

6. Игнатьев, А. В. Применение метода конечных элементов в форме классического смешанного метода к расчету систем с односторонними связями / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, М. И. Бочков // Строительная механика и расчет сооружений. — 2017. — № 2. — С. 52–61.

7. Игнатьев, А. В. Расчет тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жесткого целого / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. А. Гамзатова // Известия высших учебных заведений. Строительство. — 2018. — №. 3. — С. 5–13.

8. Радкевич, Р. А. О влиянии выбора варианта основной системы метода сил для бесшарнирной арки на устойчивость решения канонических уравнений / Р. А. Радкевич // Строительные конструкции. — Новополоцк: ПГУ, 2015. — С. 77. URL: https://elib.psu.by:8080/bitstream/123456789/15391/5/Труды%20молодых_2015%20Вып.9_ СТРОИТЕЛЬНЫЕ%20КОНСТРУКЦИИ.pdf#page=9

9. Романова, М. В. О влиянии выбора варианта основной системы метода сил на достоверность расчета рамных конструкций / М. В. Романова // Строительные конструкции. — Новополоцк: ПГУ, 2014. — Р. 52. — URL: https://elib.psu.by/bitstream/123456789/17465/5/3_74 %20Строительные %20конструкции.pdf#page=4

10. Kozelskaya, M. Stress strain behavior research of triangular dam using analytical and numerical methods / M. Kozelskaya, D. Donskova, V. Ulianskaya, P. Shvetsov // IPICSE-2018. — 2018. — No 251. — P. 8. DOI: https://doi.org/10.1051/matecconf/201825104043.

11. Донскова, Д. О. Особенности расчета треугольной плотины численным и аналитическим методом / Д. О. Донскова // Молодой исследователь Дона. — 2019. — № 2 (17). — С. 9. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-rascheta-treugolnoi-plotiny-chislennym-i-analiticheskim-metodom.

Поступила в редакцию 18.11.2022

Поступила после рецензирования 25.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

Об авторах:

Гагалаян Гурген Татеосович — студент факультета «Промышленное и гражданское строительство» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, ggagalayan@mail.ru, тел.: +7 (950) 865-43-26.

Фоминых Анна Сергеевна — студент факультета «Промышленное и гражданское строительство» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, fomanya03@gmail.com, тел.: +7 (908) 517-41-66.

Заявленный вклад авторов:

А. С. Фоминых — проведение расчетов в программе *Balka-Stenka*, подготовка текста статьи. Г. Т. Гагалаян — проведение расчетов в ПК «ЛИРА», подготовка графической части, редактирование текста статьи.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.